Intersections et Convergence

Paul de Faget de Casteljau

Abstract. C'est en 1958, que j'ai rejoint l'équipe de fraisage numérique, CAO de la préhistoire, animée par Monsieur de la Boixière : Farfelus pour les uns, fous pour d'autres, personne en dehors de notre chef n'aurait osé parier un seul kopek sur l'avenir de cette technique. Les problèmes à surmonter étaient aussi nombreux que fort ardus : Par exemple, celui d'intersections, ou racines. Nos ordinateurs se bloquaient. De toute urgence, il fallait mettre sur pied une méthode efficace, en harmonie avec les exigences de ce nouvel outil. Après tant d'essais d'autant plus volumineux, que longtemps infructueux, comme tout parait simple, quand on présente le joyau final! Mieux encore, une idée directrice, qui comblera d'aise les férus de fractions continues, nous y conduit en toute logique.

§1. Un Peu d'Histoire

Pour démarrer l'étude des formes de C.A.O., quelques instants de réflexion pouvaient suffire, pour se convaincre que, pour concilier les impératifs du dessin à ceux d'une production de calculs, la seule solution acceptable restait l'utilisation en géométrie affine des formes paramétriques polynomiales à travers l'algorithme devenu célèbre. La nécessité d'obtenir une solution, unique pour tout paramètre, interdisait des calculs aventureux. Même si le calcul de fonctions du genre arc $\cos(x)$, au voisinage de $x = 0$, aurait gagné du point de vue logique, de l'utilisation de formes $\sqrt{x}$, déjà multiforme, les mathématiques en sont restées aux séries entières! (rarement, les fractions rationnelles, fractions continues...).

Il n'en restait pas moins à traiter de nombreux problèmes, qui, chacun, pouvait me donner l'impression d'avoir à passer le concours de l'agrégation, me créant des cauchemars nocturnes, tout en regrettant amèrement le bon et solide poste de professeur qui aurait pu être le mien.

"M'sieur, ça ne marche pas!", phrase rituelle, qui m'annonçait encore une nouvelle catastrophe, à cette époque héroïque, pour ne pas dire préhistorique. Cela m'arrachait à mes méditations et rêveries où je me figurais dans une sorte de paradis terrestre, où les mêmes visiteurs me félicitaient de ma dernière

Curve and Surface Design: Saint-Malo 1999

Pierre-Jean Laurent, Paul Sablonnière, and Larry L. Schumaker (eds.), pp. 9–15.

ISBN 0-8265-1356-5.

trouvaille d'un "Ce n'est vraiment pas mal, votre truc!", phrase toujours restée dans le virtuel de ma pensée.

Parmi ces innombrables problèmes, qui me ramenaient brutalement au sens des réalités, il y eut le problème des intersections. Là encore, pas question d'adopter une attitude universitaire, autour d'une savante discussion sur l'existence et la nature d'éventualités favorables. Il fallait "produire" une racine et une seule, et de surcroît, de valeur acceptable. Cette fois, l'unicité devenait difficile à garantir, surtout au voisinage de racines multiples, voisines ou confondues. Aucune des tentatives de tenir compte des termes non linéaires (Whittaker, etc...) pour améliorer la méthode de Newton ne s'est vraiment imposée. Et les exploitations en ordinateurs atteignaient la limite du quart d'heure qui, par précaution, en limitait la durée! Et de plus, il fallait agir vite, très vite...pour reprendre un problème très classique à zéro, en poussant notre "cri de guerre" : "Mais, qu'alors y faire?" (jeu de mots: allusion à un calorifère).

§2. Exposé du Problème

On veut calculer la valeur de x, qui vérifie l'équation

$$P(x) = 0,$$

où $P(x)$ est un polynôme (ou un développement limité, en série de Taylor, d'une fonction $f(x)$...).

Ce problème se pose aussi à plusieurs inconnues; ainsi, pour $n = 3$, calcul de x, y, z pour que

$$\begin{cases} P(x,y,z) &= 0, \\ Q(x,y,z) &= 0, \\ R(x,y,z) &= 0. \end{cases}$$

Pour le cas $n = 2$, j'ai présenté au congrès de Schloß Dagstuhl (Saarland 1996) une fort jolie méthode, habile manipulation de géométrie projective, très efficace; malheureusement, tous mes efforts de l'étendre à d'autres valeurs de n ont échoué. J'ajouterai à l'adresse des chercheurs, qui auraient la témérité d'étudier le cas $n = 3$, que j'avais bien cerné la difficulté qui rendait ce cas impossible.

Les seules équations qui conduisent à une solution unique, sont du premier degré. Il nous reste la possibilité de tenter une identification autour de $x = 0$ du polynôme $P(x)$ à une fraction rationnelle dont le numérateur soit linéaire.

$$n = 1 \qquad P(x) \sim \frac{a + bx}{1 + dx + ex^2 + \dots}$$

$$n = 3 \qquad P(x,y,z) \sim \frac{a + bx + cy + dz}{1 + \sum h_p x^\alpha y^\beta z^\gamma}$$

On en déduit une suite d'approximations de la racine, chacune utilisant les précédentes, de façon optimale. Cela peut se prouver par l'analyse, et

le vérifier sur des exemples concrets : elle est la meilleure, comparée à toute manipulation du même type.

L'identification brutale, terme à terme, conduit à

$$A + Bx + Cx^2 \sim \frac{AB + (B^2\text{-}AC)x}{B - Cx + \ldots}$$
$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 \sim \frac{A(B^2\text{-}AC) + [A(AD\text{-}BC) + B(B^2\text{-}AC)]x}{B^2\text{-}AC + (AD\text{-}BC)x + (C^2\text{-}BD)x^2 + \ldots}$$
$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 \sim \frac{\text{num}}{\text{den}},$$

$$\begin{aligned}
\text{num} = {} & A[A(AD - BC) + B(B^2 - AC)] \\
& + [A^2(BD - AE) + AB(AD - BC) + (B^2 - AC)^2]x \\
\text{den} = {} & [A(AD - BC) + B(B^2 - AC)] \\
& + [A(BD - AE) - C(B^2 - AC)]x \\
& + [B(AE - BD) - C(AD - BC)]x^2 \\
& - [A(D^2 - CE) + B(BF - CD) + C(C^2 - BD)]x^3 + \ldots
\end{aligned}$$

Seuls les numérateurs nous intéressent :

$$\begin{vmatrix}
B & A & 0 & 0 & 0 & \ldots \\
C & B & A & 0 & 0 & \ldots \\
D & C & B & A & 0 & \ldots \\
E & D & C & B & A & \ldots \\
F & E & D & C & B & \ldots \\
\ldots & \ldots & & & & \\
\ldots & \ldots & & & &
\end{vmatrix}$$

Si on appelle U_i la succession des déterminants utilisant les i premières lignes et colonnes de la matrice ci-dessus, en posant $U_0 = 1$, on obtient la séquence d'approximations

$$x_i = -\frac{A\,U_{i+1}}{U_i},$$

$x_1 = -\frac{A}{B}$ (Newton), x_2 coïncide avec Whittaker, mais non x_3 et au delà. *Mais il y a mieux à faire !*

§3. Algorithme

Une étude complète de cette question prouve que l'on obtient le même résultat en utilisant un algorithme qui rappelle le schéma de Hörner.

Il s'agit de calculer la racine x, en partant de la valeur $x = 0$ d'une série entière type MacLaurin écrite sous la forme

$$a_0 = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

On écrit alors l'algorithme sous la forme :

$a_0 = a_1 N$	donne	$N \sim$ Newton	
$a_0 = (a_1 + a_2 N)P$	"	$P \sim$ Whittaker	1
$a_0 = [a_1 + (a_2 + a_3 N)P]Q$	"	$Q \sim$ Fractions continues	2^2
$a_0 = \{a_1 + [a_2 + (a_3 + a_4 N)P]Q\}R$	"	R	5^3
			130^4
... etc ...	"	$S, T, \dots$	

On a indiqué à droite le nombre (*) de possibilités d'utilisation des approximations antérieures, dans un ordre différent, ou avec répétition. Mes études, à l'époque, m'ont conduit à prouver qu'aucune ne fait mieux, avec les hypothèses adoptées (le nombre 130 est la somme des trois précédents, pour tenir compte de toutes les approximations nouvelles).

Cette méthode est d'autant plus efficace que la série à inverser est plus convergente ; cela se vérifie pour e^x, $\sin(x)$, $\mathrm{sh}(x)$, pour calculer $\ln(x)$, Arc $\sin(x)$, Arg $\mathrm{sh}(x)$.

On va, à titre d'exemple, calculer le logarithme népérien de 2, là où la série $\ln(1 + x)$, au bord de son cercle de convergence, est particulièrement désespérante.

Il convient de n'y voir qu'un exemple, et non une invitation à faire le calcul des logarithmes de cette façon-là. Notons encore tout l'intérêt d'inverser les lignes trigonométriques par l'utilisation *simultanée* du sinus et du cosinus, ou encore pour un triangle rectangle les cotés S, C, H du sinus, du cosinus et l'hypoténuse.

Pour les lecteurs intéressés par cette question, on peut démontrer deux séquences de réduites de fractions continues, coïncidant une fois sur deux, ou encadrant par excès et par défaut, la valeur exacte de la fonction : l'une de ces séquences se rattache au développement de Arc $\mathrm{tg}(\varphi/2) = t$ avec $S = 2t$, $C = 1 - t^2$, $H = 1 + t^2$, l'autre est originale. A l'époque où le calcul des fonctions n'était pas encore très au point, au niveau des ordinateurs, les formules simplifiées de Arc sin et Arc cos nous ont rendu un grand service. Ainsi, $\varphi \# S.\frac{14+C}{9+6C}$ qui n'est pas ridicule à $S = 1$, $C = 0$: $\varphi = \frac{\pi}{2} \sim \frac{14}{9}$. Mais cela n'est pas le sujet de cet exposé.

Exemple numérique :

Appliquons cet algorithme au calcul de x, défini par :

$$2 = e^x \sim 1 + \frac{x}{1}(1 + \frac{x}{2}(1 + \frac{x}{3}(1 + \dots(\dots(1 + \frac{x}{n}) \quad \dots \quad)\dots)))$$

On trouve ainsi :

(*) on pourrait encore considérer les possibilités obtenues, en prenant les formes polaires des N, P, Q. Ainsi, à la seconde ligne, au lieu de $a_1 P$, on écrirait $a_1 \frac{N+P}{2}$, etc...

$$\begin{array}{lcrl}
N &=& 1 = & 1.00 \\
P &=& \frac{2}{3} = & 0.\underline{6}66\ 6 \\
Q &=& \frac{9}{13} = & 0.\underline{69}2\ 30 \\
R &=& \frac{52}{75} = & 0.\underline{693}\ 333 \\
S &=& \frac{375}{541} = & 0.\underline{693}\ \underline{1}608 \\
T &=& \frac{3\,246}{4\,683} = & 0.\underline{693}\ \underline{14}5\ 41 \\
U &=& \frac{32\,781}{47\,293} = & 0.\underline{693}\ \underline{146}\ 977 \\
V &=& \frac{378\,344}{545\,835} = & 0.\underline{693}\ \underline{147}\ \underline{1}96\ 49 \\
W &=& \frac{4\,912\,515}{7\,087\,261} = & 0.\underline{693}\ \underline{147}\ \underline{18}3\ 337 \\
X &=& \frac{70\,872\,610}{102\,247\,563} = & 0.\underline{693}\ \underline{147}\ \underline{180}\ 436 \\
 & & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
 & & & 0.693\ 147\ 180\ 559\ 945\ 309
\end{array}$$

soit environ un gain d'une décimale à chaque itération, ce qui reste plus qu'honorable comparé avec les séries traditionnelles $\ln(1+u)$ avec $u=1$ ou $\ln(\frac{1+u}{1-u})$ avec $u=\frac{1}{3}$, bien plus convergente.

§4. Promenade au Pays du Logarithme

Il est toujours passionnant de reprendre à son compte l'étude des fonctions élémentaires, qui conduisent à des développements d'une telle richesse, qu'ils paraissent inépuisables. Ainsi en est-il avec le logarithme, l'étude qui suit, et qui n'est qu'un tout petit aperçu des propriétés que révèle l'analyse, sans parler des propriétés dévoilées par l'arithmétique.

L'étude précédente, reprise de façon littérale, founit la succession d'approximations

$(x-1)$; $2\frac{(x-1}{(x+1)}$; $3\frac{(x-1)(x+1)}{x^2+4x+1}$; $4\frac{(x-1)(x^2+4x+1)}{(x+1)(x^2+10x+1)}$; $5\frac{(x-1)(x+1)(x^2+10x+1)}{x^4+26x^3+66x^2+26x+1}$; ...

On constate déjà plusieurs règles empiriques. Sans insister, posons :

si $n=2p$: $\quad n\,\frac{(x-1)}{(x+1)}\frac{P_{2n-2}}{Q_{2n-2}}$, $\qquad$ si $n=2p+1$: $\quad n\,(x-1)(x+1)\frac{Q_{2n-2}}{P_{2n}}$.

On peut encore réduire l'écriture de ces polynômes reconnus symétriques, en posant $x+\frac{1}{x}-2=2t$ et si $k_q=1$ pour les polynômes P et $k_q=q$ pour les polynômes Q :

Q ou $P=1$

P_1 ou $Q_1=t+3k_2$

P_2 ou $Q_2=t^2+15k_2t+30k_3$

P_3 ou $Q_3=t^3+63k_2t^2+420k_3t+630k_4$

P_4 ou $Q_4=t^4+255k_2t^3+4410k_3t^2+18900k_4t+22680k_5$

......

On peut encore comparer ces fonctions avec les réduites du développement de $\ln(x)$ en fractions continues, très inhabituelles, parce qu'elles sont centrées autour de $x=1$ au lieu du zéro habituel. Elles sont très faciles à obtenir,

par intégration de formules $Q(x)\ln(x) - P(x) = k(x-1)^n$, alternées avec des changements de x en $1/x$, qui change le signe de $\ln(x)$.

On remarquera les carrés des coefficients du binôme, dans les expressions des dénominateurs de rang pair (cela se démontre).

$$(x-1) \;;\; \frac{2(x-1)}{x+1} \;;\; \frac{x^2+4x-5}{4x+2} \;;\; \frac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1} \;;\; \frac{x^3+18x^2-9x-10}{9x^2+18x+3} \;;$$
$$\frac{11x^3+27x^2-27x-11}{3(x^3+9x^2+9x+1)} \;;\; \frac{3x^4+128x^3+108x^2-192x-47}{12(4x^3+18x^2+12x+1)} \;;\; \frac{25x^4+160x^3-160x-25}{6(x^4+16x^3+36x^2+16x+1)} \ldots$$

Si l'on pose $D_n = \frac{(x-1)^n}{\Sigma\,(C_n^p)^2 x^p}$ et en utilisant la valeur des réduites paires, on peut même arriver à établir cette formule particulièment brillante :

$$\ln(x) \sim 2\,[\,\frac{D_1}{1} + \frac{D_1D_2}{2} + \frac{D_2D_3}{3} + \frac{D_3D_4}{4} + \cdots + \frac{D_{n-1}D_n}{n} + \cdots\,].$$

Remarque. L'étude arithmétique, à laquelle j'ai fait allusion, obéit à une démarche opposée à celle de la table des nombres premiers. On ne retient des nombres entiers que ceux dont les facteurs premiers ne sont que les n premiers nombres de cette table des nombres premiers. Les inégalités sur leurs logarithmes qui en découlent fournissent une série de solutions aux problèmes de Dirichlet-Hermite. On trouve ainsi une explication rationnelle aux gammes musicales... Voir à ce sujet les derniers chapitres de mon livre "Quaternions".

Ces considérations s'appliquent aussi à des fonctions. Ainsi trouver les meilleures solutions polynomiales à un degré donné, sensiblement proportionnelle à un arc, et à leurs sinus et cosinus. On peut y rajouter la tangente, etc...

§4. Cas de Plusieurs Variables

Le regard de l'analyse

Le problème est trop vaste pour être exposé en quelques lignes. Nous renvoyons aux ouvrages spécialisés, pour constater qu'il ne suffit pas de se donner p points, pour définir la valeur de p coefficients d'une interpolation à plusieurs paramètres. Il intervient alors la notion de silhouette du polynôme associé à une grille de points donnés. Les silhouettes les plus considérées, à deux variables, peuvent être ainsi triangulaires $\sum x^\alpha y^\beta$ avec $\alpha + \beta \leq n$, ou encore rectangulaires si $\alpha \leq n$, $\beta \leq q$ et carrées si $n = q$. Paradoxalement, c'est avec les grilles les plus régulières qu'on rencontre le plus de contraintes à respecter.

C'est en fonction de la notion de sihouette que l'on imposera un certain ordre de classement aux termes d'un polynôme à plusieurs variables. Pour déterminer une fraction rationnelle à numérateur linéaire au voisinage d'un point, on peut imaginer l'écriture d'un déterminant dont la première ligne s'écrit :

$1,\quad x,\quad y,\quad f,\quad xf,\quad yf,\quad x^2f,\quad xyf,\quad y^2f, \ldots$

la deuxième ligne exprime que f passe par le point X, Y, F (déterminant nul, si deux lignes égales) ensuite, un point voisin en X (puis en Y) et par différence avec cette seconde ligne s'exprimera à partir des dérivées partielles en X (puis en Y). On poursuivra les lignes suivantes avec les dérivées d'ordre supérieur.

Mais voilà ! On se heurte à un mur: le problème est indéterminé.

"Qu'alors y faire" ? Faut-il renoncer ? Le problème exige une solution, brillante, ou batarde, peu importe, à condition d'en trouver UNE ! Démarche industrielle, et non universitaire.

Alors, miracle ! Quelle que soit la façon dont on lève l'indétermination, par un choix arbitraire d'un terme de chaque degré du dénominateur, on retrouve le même numérateur; or c'est de lui et de lui seul qu'on a besoin, et tout rentre dans l'ordre.

Ici, honnêtement, je dois avouer, que je n'ai développé ce calcul, assez fastidieux, que dans le seul cas de deux variables.

Retour à l'algorithme

Il est plus rapide de faire un raisonnement, que d'aucuns jugeront fort acrobatique, mais parfaitement correct. Dans chaque équation, on suppose le problème résolu, pour toutes les variables, excepté une, d'abord x (puis $y, z, \ldots$). On applique alors notre algorithme au calcul de la première approximation de Newton donc N_x (puis N_y, N_z). On résoud le système, ce qui donne N_x, N_y, N_z.

On utilise ces valeurs approchées, comme on sait le faire pour déterminer P_x (puis P_y, P_z) et par suite P_x, P_y, P_z. Une troisième étape permettra le calcul de Q_x, Q_y, Q_z, etc ...
La meilleure silhouette qui convienne est donc carrée ($\alpha \leq n$, $\beta \leq n$, $\gamma \leq n$), ou complétée par des 0.

Remarque: Quel que soit le nombre de variables, l'optimisation du calcul montre que l'idéal se situe entre la seconde itération P_x, P_y, P_z, et la troisième Q_x, Q_y, Q_z. Après il est préférable de revenir à un développement de Taylor centré sur ce nouveau point, sauf cas de singularité extraordinaire, qu'en principe on ne doit pas rencontrer dans la pratique industrielle.

Voilà, en raccourci, l'exposé de ce problème très utile. Son étude approfondie pourrait faire l'objet d'une thèse complète. La discussion semble ici escamotée: ce n'est pas tout à fait vrai; car si une discussion s'impose, c'est que, dans la pratique industrielle, il n'y a plus de solution pratique. Par exemple, on ne cherche jamais l'intersection d'une forme avec une verticale, qui coupe la forme en trois points, intérieurs au carreau considéré. Comment l'usinerait-on ? Comment l'emboutir ?

Paul de Faget de Casteljau
4 Avenue du Commerce
78000 Versailles, France